Повторяем тему: Системы линейных уравнений.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax+by=c$, где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа.

Например, $2x-3y=-1$; $-x-9y=0$; $5x=7$; $-3y=0{,}4$ – линейные уравнения с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Так, решением уравнения $-x-9y=0$ является пара $x=-9$, $y=1$. Решением этого уравнения будет также пара $x=8{,}1$, $y=-0{,}9$. Перечисленные пары чисел записывают короче: $(-9;1)$, $(8{,}1;-0{,}9)$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Свойства уравнений с двумя переменными такие же, как и у уравнений с одной переменной:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Воспользуемся этими свойствами для выражения переменной y через x из уравнения $3x-5y=2$: $-5y=2-3x$, $y=0{,}6x-0{,}4$ – уравнение, равносильное исходному.

Если $x=0$, то $y=0{,}6\cdot 0-0{,}4=-0{,}4$;
если $x=-2$, то $y=0{,}6\cdot(-2)-0{,}4=-1{,}2-0{,}4=-1{,}6$;
если $x=5$, то $y=0{,}6\cdot 5-0{,}4=3-0{,}4=2{,}6$.

Пары чисел $(0;-0{,}4)$, $(-2;-1{,}6)$, $(5;2{,}6)$ являются решениями уравнения $3x-5y=2$. Это уравнение имеет бесконечное множество решений.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными $ax+by=c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля, является прямая.

Построим график уравнения $3x-2y=4$.

Найдём координаты двух точек графика:

x	0	2
y	-2	1

Отметим точки $A(0;-2)$ и $B(2;1)$ в координатной плоскости и проведём через них прямую (рис. 33). Прямая AB – график уравнения $3x-2y=4$.

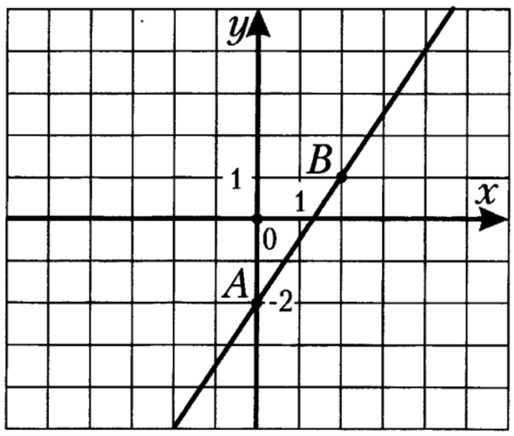

Рис. 33

Если в уравнении $ax+by=c$ коэффициенты $a=b=0$, то уравнение имеет вид: $0x+0y=c$.

При $c=0$ любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком – вся координатная плоскость.

При $c\neq 0$ уравнение не имеет решений и его график не содержит ни одной точки.

Графический способ решения систем линейных уравнений с двумя переменными

Решим систему линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} x+y=6, \\ 3x-y=-2 \end{cases}$ с помощью графиков уравнений.

Построим в координатной плоскости графики уравнений системы.

Прямая AB – график первого уравнения, прямая CD – график второго уравнения (рис. 35). Графики пересекаются в точке $M(1; 5)$. Значит, система имеет единственное решение: $x=1$, $y=5$.

Ответ: $(1; 5)$.

Заметим, что графический способ позволяет находить решения лишь приближённо.

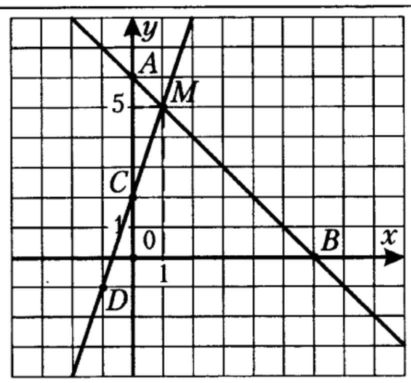

Рис. 35

Рассмотрим системы двух линейных уравнений с двумя переменными, в каждом из которых хотя бы один из коэффициентов при переменных x и y отличен от нуля. С помощью графиков этих уравнений можно выяснить, имеет ли система решения и если имеет, то сколько.

Графиками уравнений системы являются прямые. Если эти прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; если прямые параллельны, то система не имеет решений; если прямые совпадают, то решений бесконечно много.

Пример 1. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 3x-5y=14, \\ 2x+y=-6. \end{cases}$

Выразим y через x из каждого уравнения системы: $\begin{cases} y=0{,}6x-2{,}8, \\ y=-2x-6. \end{cases}$

Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками соответствующих линейных функций, различны. Значит, эти прямые пересекаются, и система имеет **единственное решение**.

Пример 2. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 3x-5y=14, \\ 6x-10y=-12. \end{cases}$

Выразим y через x из каждого уравнения системы: $\begin{cases} y=0{,}6x-2{,}8, \\ y=0{,}6x+1{,}2. \end{cases}$

Угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками соответствующих линейных функций, равны, а точки пересечения с осью y различны. Значит, эти прямые параллельны, и система **не имеет решений**.

Пример 3. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 3x-5y=14, \\ 6x-10y=28. \end{cases}$

Выразим y через x из каждого уравнения системы: $\begin{cases} y=0{,}6x-2{,}8, \\ y=0{,}6x-2{,}8. \end{cases}$

Графики уравнений совпадают. Это означает, что любая пара чисел $(x_0;\ 0{,}6x_0-2{,}8)$ является решением системы. Система имеет **бесконечно много решений**.

При решении систем линейных уравнений **способом подстановки**:
1) выражают из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставляют полученное выражение этой переменной в другое уравнение;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

При решении систем линейных уравнений **способом сложения** переходят от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную. При этом:
1) умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

Заметим, что если коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то решение сразу начинают с почленного сложения уравнений.

При решении задач с помощью систем линейных уравнений поступают следующим образом:
1) обозначают некоторые неизвестные числа буквами и, используя условие задачи, составляют систему уравнений;
2) решают эту систему;
3) истолковывают этот результат в соответствии с условиями задачи.

Задача 1. Разность двух чисел равна 16, а их сумма равна 26. Найди эти числа.
Решение. Пусть x – первое число, y – второе число. Тогда
$$\begin{cases} x-y=16, \\ x+y=26; \end{cases} \begin{cases} 2x=42, \\ y=26-x; \end{cases} \begin{cases} x=21, \\ y=5. \end{cases}$$
Ответ: 21 и 5.

Задача 2. За 4 блокнота и 3 карандаша заплатили 95 р., а за 2 блокнота и 5 карандашей – 65 р. Сколько стоит 1 блокнот и 1 карандаш?
Решение. Пусть x р. стоит 1 блокнот, y р. – 1 карандаш. Тогда
$$\begin{cases} 4x+3y=95, \\ 2x+5y=65; \end{cases} \begin{cases} 4x+3y=95, \\ -4x-10y=-130; \end{cases} \begin{cases} -7y=-35, \\ x=\frac{1}{2}(65-5y); \end{cases} \begin{cases} y=5, \\ x=20. \end{cases}$$
Ответ: блокнот стоит 20 р., карандаш – 5 р.